Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"
Proba pe echipe, clasele IX-XII
27 octombrie 2013

Soluţii

BARAJUL al IV-lea

Problemă: Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 = 1,\ x_{n+1} = 3\cdot x_n + \sqrt{8\cdot x_n^2 - 7}, n \geq 0$. Să se determine numerele $a,b,c \in \mathbb{R}^*$ pentru care $a\cdot x_n + b\cdot x_{n+1} + c\cdot x_{n+2} = 0, (\forall) n \geq 0.$

Soluţie:

$(x_{n+1} - 3\cdot x_n)^2 = 8\cdot x_n^2 - 7 \Leftrightarrow x_n^2 - 6\cdot x_n\cdot x_{n+1} + x_{n+1}^2 = -7;$

La fel $x_{n+2}^2 - 6\cdot x_{n+1}\cdot x_{n+2} + x_{n+1}^2 = -7;$

Considerăm ecuaţia $t^2 - 6\cdot x_{n+1}\cdot t + x_{n+1}^2 + 7 = 0.$ Această ecuaţie, conform relaţiilor de mai sus, are rădăcinile x_n şi $x_{n+2} \Rightarrow x_n + x_{n+2} = 6\cdot x_{n+1}.$ Obţinem: $a = 1;\ b = -6;\ c = 1.$

Răspuns: $a = 1;\ b = -6;\ c = 1.$